Ejercicios (Series de potencias)

10.1. Determinar el intervalo de convergencia de las series de potencias

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\Big)^2 x^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)x^n$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n/n}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot x^n$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$,

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n4^n}x^n$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 4^n}x^n$, i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}x^n$, j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sqrt{n}}x^n$, l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}x^{2n+1}$, m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\big(\frac{x}{n}\big)^n$, n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log n}{n}x^n$,

ñ) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n\tan\frac{a}{2^n}$.

10.2. Desarrollar en series de potencias de x las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:

a) $\dfrac{2x^2-3}{(x-1)^2}$, b) $\dfrac{x}{9+x^2}$, c) $\dfrac{1}{4-x^4}$, d) $\log(1+x-2x^2)$,

e) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$, f) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$, g) $\sqrt[3]{8+x}$,

h) $(1+e^x)^3$, i) $(1+x)e^{-x}$, j) $\cos^2 x$, k) $\cos x\operatorname{sen}^2 x$,

l) $\operatorname{sen}^2 2x$, m) $\log\dfrac{a+bx}{a-bx}$, $a,b>0$, n) $\log(1-2x)$,

ñ) $\sqrt{1+x^3}$, o) $\dfrac{x}{a^2-b^2x^2}$, $a,b>0$, p) $(x^2+1)e^{2x}$,

q) $\operatorname{sen} x - x\cos x$, r) $\dfrac{1}{x-1}+x^2\operatorname{sen} x$,

s) $\displaystyle\int_0^x e^{-z^2}\,dz$, t) $\displaystyle\int_0^x\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$.

10.3. Sea $f(x)=\int_0^x\sqrt{8-t^3}\,dt$, para $x\in(-\infty,2]$. Desarrollar f en serie de potencias de x (centrada en 0). Hallar el radio y el intervalo de convergencia del desarrollo. Hallar $f^{(7)}(0)$ y $f^{(11)}(0)$.

10.4. Desarrollar en series de potencias de $x-x_0$ las siguientes funciones, indicando en qué intervalos son válidos los desarrollos:

a) $(a+bx)^{-1}, \quad x_0 = 1, \quad a, b > 0,$ b) $\operatorname{sen} \dfrac{3x}{2}, \quad x_0 = \pi,$

c) $\sqrt{1+x}, \quad x_0 = 3,$ d) $\log 2x - \dfrac{1}{x-1}, \quad x_0 = 2.$

10.5. Desarrollar en serie de potencias de x la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{t\,dt}{(3-t)(t+2)}, \qquad -2 < x < 3,$$

y determinar el radio y el intervalo de convergencia de la serie.

10.6. Determinar el dominio de convergencia y la suma de las series:

a) $1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n},$ b) $\dfrac{x}{1\cdot 2} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^3}{3\cdot 4} + \dfrac{x^4}{4\cdot 5} + \cdots$

10.7. Hallar el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$ y probar que sus suma es

$$\frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arctan x.$$

10.8. Encontrar la única serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia no nulo que cumple $f'' + f = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Identificar esta función.

10.9. Hallar el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n(3n-1)}$ y sumarla en el intervalo abierto. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n-1)}$.

10.10. Hallar el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n(3n+1)}$ y sumarla en el intervalo abierto. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(3n+1)}$.

10.11. Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(n-1)}{n^2+n} x^{n+1}$. Probar que $f(x) = (x-1)\log(1-2x) - 2x$ en ese intervalo.